Mathématiques : analyse

Séance 4 : Suites : définition et convergence

MATH-S-1011 et MATH-S-1021 — Université libre de Bruxelles
Solvay Brussels School of Economics and Management
Auteurs : Germain Van Bever et Davy Paindaveine

Contenu de la séance

Suite : définition et graphe

Suites arithmétiques et géométriques

Convergence de suites

Contenu de la séance

Suite : définition et graphe

Suites arithmétiques et géométriques

Convergence de suites

Suite : définition

Définition 4.1 (informelle)

Une suite dans A est une collection ordonnée et infinie de la forme

$$(u_1, u_2, \ldots),$$

où chacun des termes appartient à A.

Exemples :

- $(1, 2, 3, \ldots)$ est une suite dans $\mathbb{N}$.
- $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ est une suite dans $[-2, 2]$.
- $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots)$ est une suite dans $\mathbb{R}$.
- $(\sin, \cos, \sin, \cos, \ldots)$ est une suite dans l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sauf mention contraire, toutes les suites dans ce cours sont des suites réelles, c'est-à-dire, des suites dans $\mathbb{R}$.

Suite : notation

On décrit souvent une suite par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

en donnant l'expression générique de u_n (le terme de rang n).

Exemples :

- $(1,2,3,\ldots) = (n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,
- $(-1,1,-1,1,\ldots) = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$,
- $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{4}},\ldots) = (\frac{1}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}_0}$.

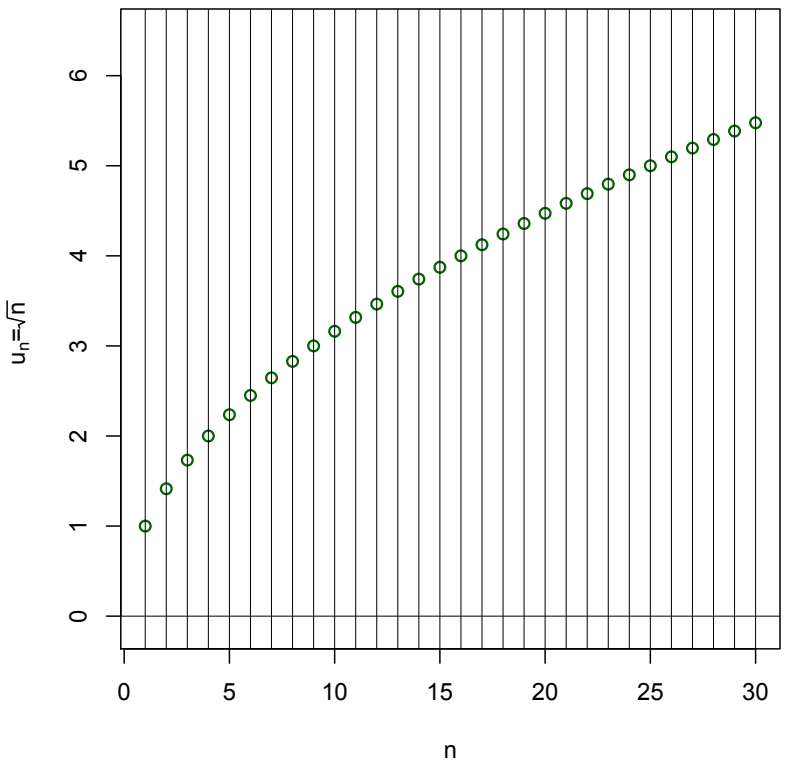
Cette notation rend plus naturelle la définition formelle des suites :

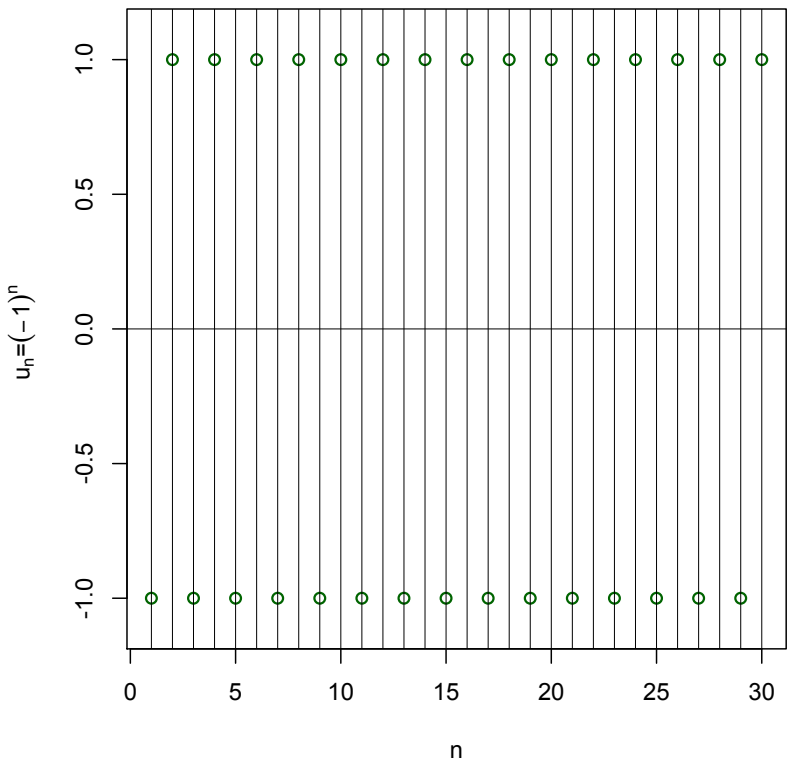
Définition 4.2

Une suite dans A est une fonction $n \mapsto u_n$ de $\mathbb{N}_0$ dans A.

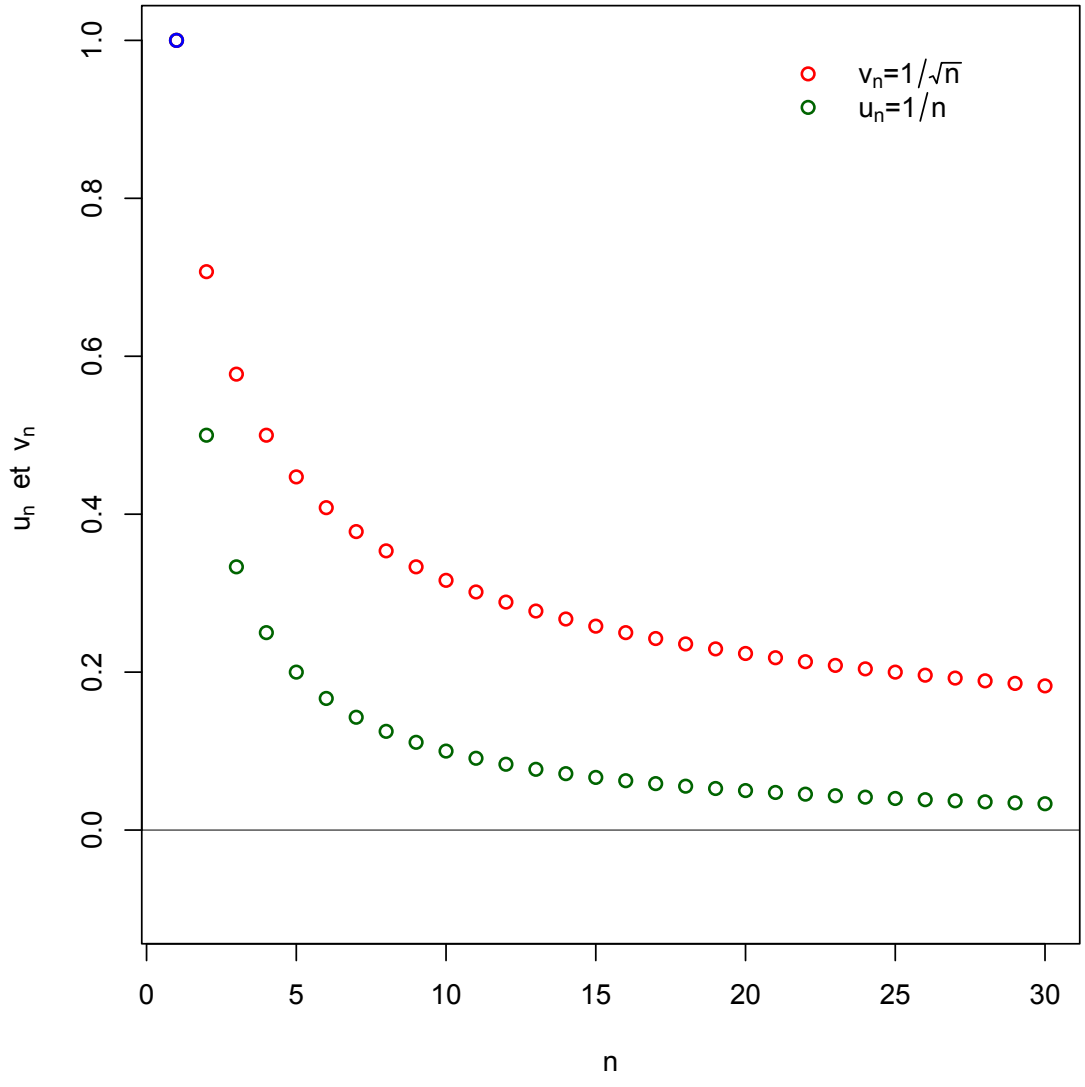
Suite : graphe

A toute suite réelle (u_n), on peut associer le graphe de la fonction $n \mapsto u_n$.





Suite : graphe (suite)



Contenu de la séance

Suite : définition et graphe

Suites arithmétiques et géométriques

Convergence de suites

Suite arithmétique

$w_{n+1} - w_n = r$?

NON, ex : $w_2 - w_1 = 22 - 21 = 1$

$w_3 - w_2 = 24 - 22 = 2$.

Définition 4.3

Pour des réels a et r, la suite

$$\big(a, a+r, a+2r, a+3r, \dots\big) = \big(a + (n-1)r\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

est dite arithmétique (de raison r).

Remarque : (u_n) est arithmétique de raison $r \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n.

$= 10 + n$.

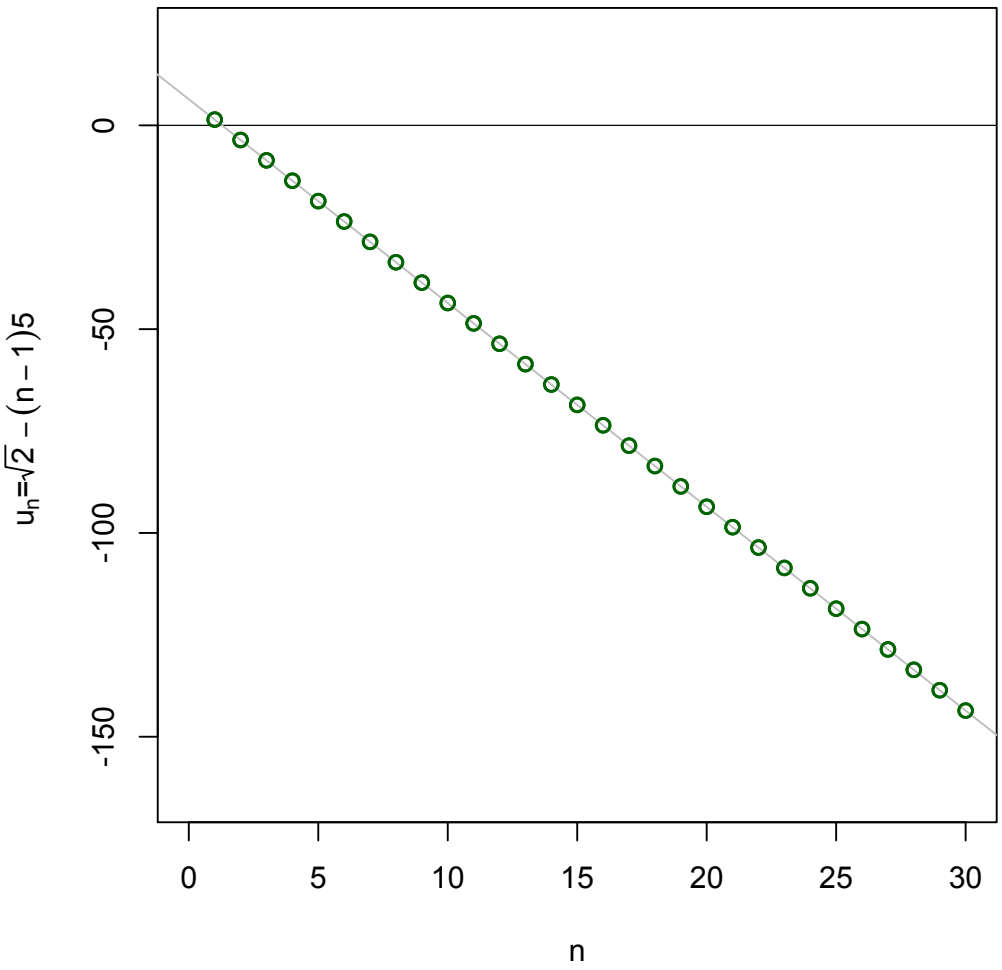
$u_n = u + (n-1) \times 1$.

Exemples :

- $(11, 12, 13, 14, \dots)$ est arithmétique, $\longrightarrow r = 1$, $a = u$.
- $(\sqrt{2}, \sqrt{2} - 5, \sqrt{2} - 10, \dots)$ est arithmétique, $\rightarrow r = -5$, $a = \sqrt{2}$.
- $(21, 22, 24, \dots)$ n'est pas arithmétique.

$v_n = \sqrt{2} - 5(n-1)$.

Suite arithmétique : graphe



Le graphe d'une suite arithmétique est inclus dans une droite (de pente r).

Suite arithmétique : exemple

La 1ère heure de travail rapporte un salaire de 30€. Chaque heure supplémentaire rapporte 2€ de plus que la précédente. On se demande (a) combien rapporte la 20ème heure? et (b) combien rapportent en tout les 20ères heures?

La suite des salaires est $(30, 32, 34, \ldots) = (\underbrace{30+(n-1)2}_{=u_n,\ \text{disons}})_{n\in\mathbb{N}_0}$. $= (u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(a) La 20ème heure rapporte donc $u_{20} = 30 + 19 \times 2 = 68(€)$.

(b) Les 20ères heures rapportent $= 30 + (20-1)\times 2$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{20} u_n}_{u_1+\ldots+u_{20}} = \sum_{n=1}^{20} (30 + (n-1)2) = \underbrace{30 + (30+2)}_{n=1} + \underbrace{(30 + 2\times 2)}_{n=2} + \ldots + \underbrace{(30 + 19\times 2)}_{n=20}$$

$$= 20 \times 30 + (1 + 2 + \ldots + 19)2 = 600 + \frac{19 \times 20}{2} \times 2 = 980(€),$$

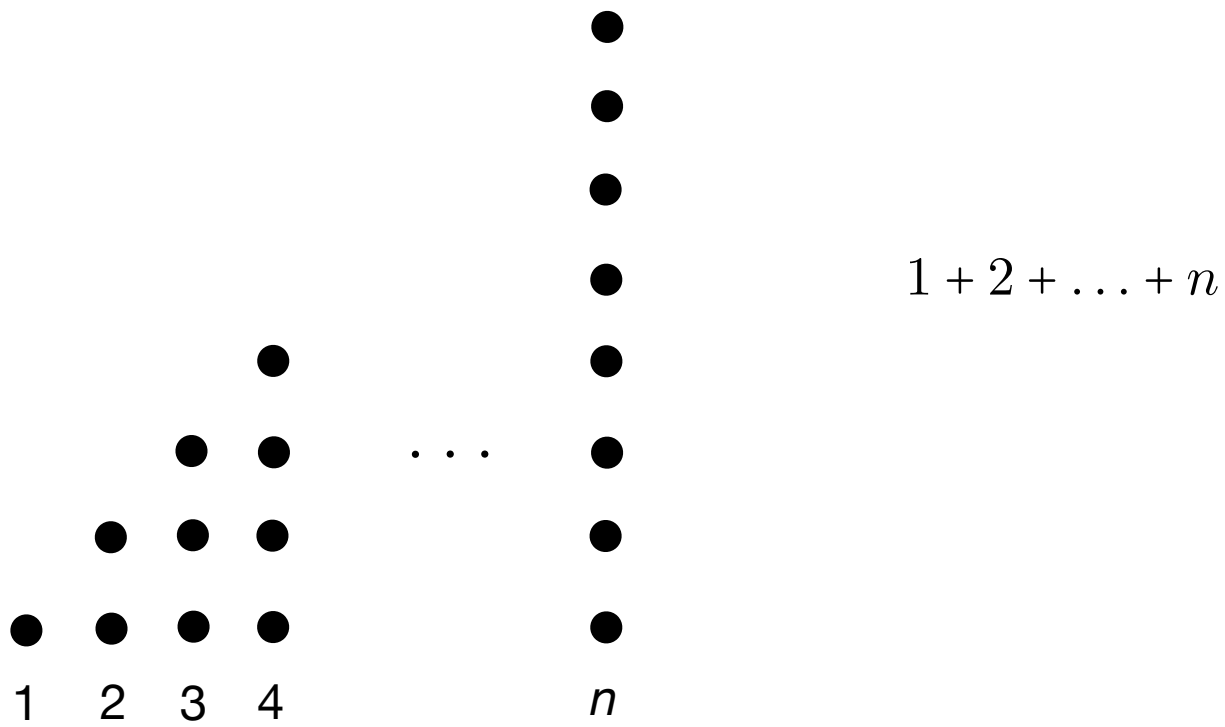
où on a utilisé le théorème suivant.

Somme arithmétique

Théorème 4.4

Pour tout $n = 1, 2, \ldots,$ *il est vrai que* $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

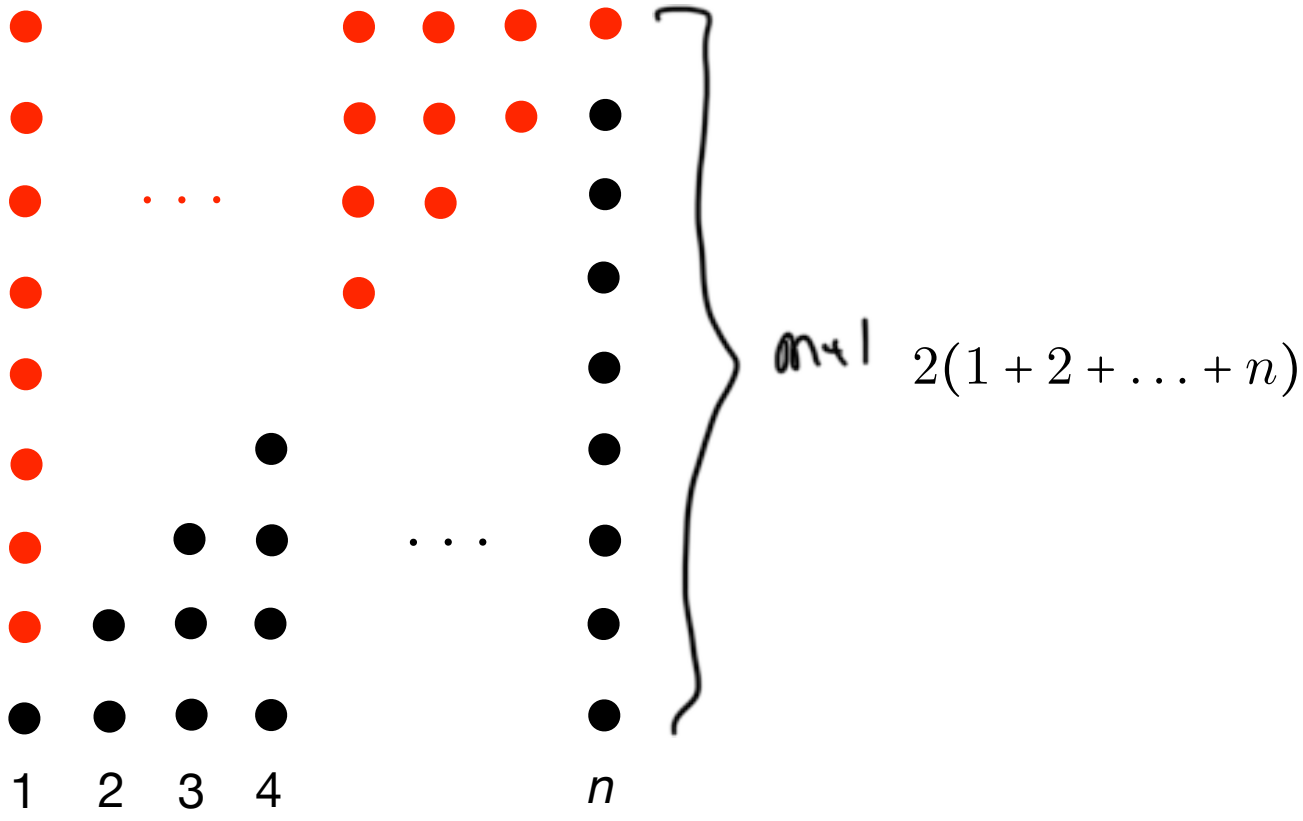


Somme arithmétique

Théorème 4.4

Pour tout $n = 1, 2, \ldots,$ *il est vrai que* $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

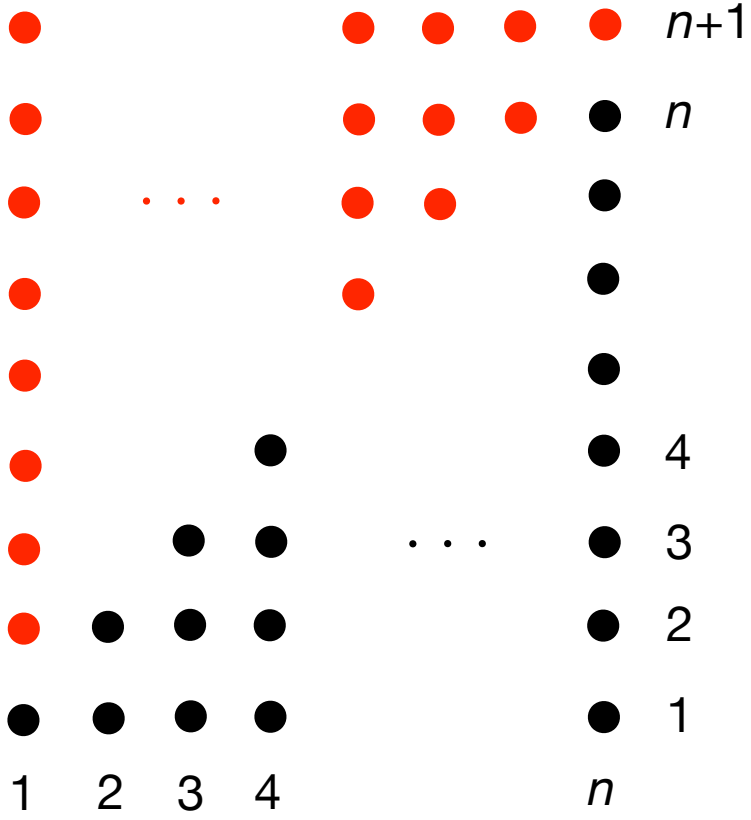


Somme arithmétique

Théorème 4.4

Pour tout $n = 1, 2, \ldots,$ *il est vrai que* $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :



$$\begin{array}{rcccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ + & n & n-1 & n-2 & \cdots & 1 \\ \hline & \underbrace{n+1 \quad n+1 \quad n+1 \quad \cdots \quad n+1}_{n \text{ fois.}} \end{array}$$

$2(1+\ldots+n) = n(n+1)$.

$1+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$2(1+2+\ldots+n) = \underbrace{n(n+1)}_{\text{nbr total de point}}$$

pts en noir et les pts en rouge.

$\Leftrightarrow 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

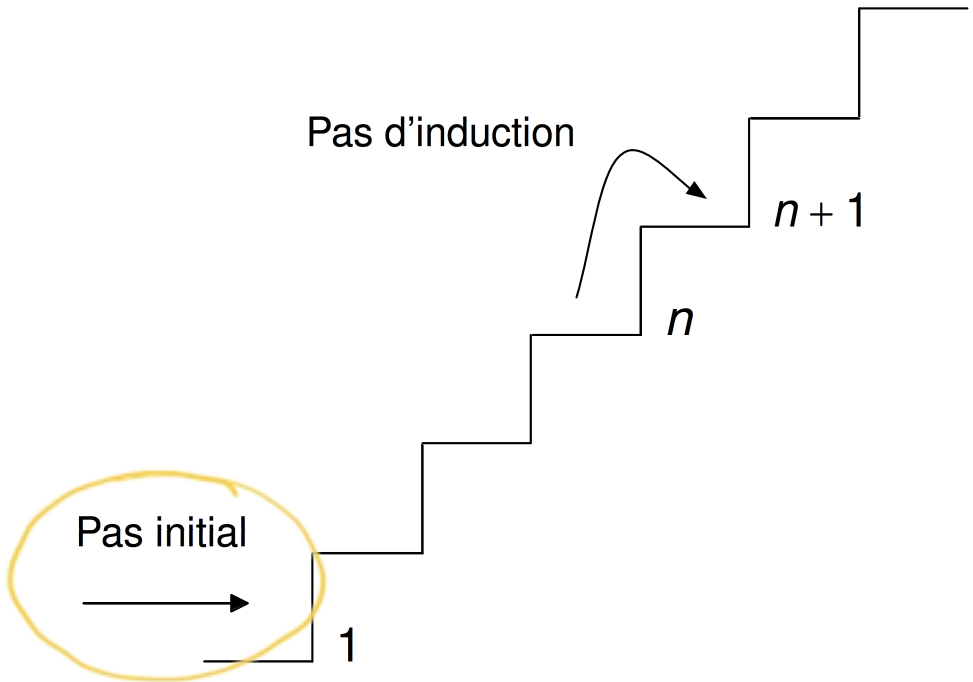
Somme arithmétique : preuve par induction

Théorème 4.5

Pour tout $n = 1, 2, \ldots,$ *il est vrai que* $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration : (par induction)

Comment monter un escalier?



Somme arithmétique : preuve par induction

Théorème 4.5

Pour tout $n = 1, 2, \ldots,$ *il est vrai que* $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration : (par induction)

Montrons, par récurrence / induction, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

* Initialisation : pour $n = 1$, on a bien que :

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1. \quad \text{Ok.}$$

* Récurrence : On suppose la propriété vraie au rang n

ie. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrons alors que la propriété est vraie au rang $n+1$: i.e $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

On a : $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{HR}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

(*)

(*) On a montré que la propr. est vraie pour $n=1$ et que l'hérédité est vraie. Donc

$\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Interlude : à votre tour!

Prouver par induction le théorème suivant.

Théorème 4.6

Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, *il est vrai que* $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration :

$n \leftarrow n+1$

$1^2 + \ldots + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

* Init : Pour $n=1$: $1^2 = 1$.

$\dfrac{1\times(1+1)\times(2\times1+1)}{6} = \dfrac{2\times3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$. ok.

* HR : on suppose $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Mq : $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{HR}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad (2n+\ldots)(n+\ldots)$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

* CCL : ok !

Notation : somme

Avec la notation

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

les deux résultats ci-dessus s'écrivent

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemple : que valent les sommes suivantes ?

$$\sum_{k=3}^{7} 3(k-1) = 3\sum_{k=3}^{7}(k-1) = 3\sum_{k=2}^{6} k = 3\left(\sum_{k=1}^{6} k - 1\right) = 3\left(\frac{6\times 7}{2} - 1\right) = 60.$$

$$0 = \sum_{\ell=-2}^{2} \ell^{13} = (-2)^{13} + (-1)^{13} + 0^{13} + 1^{13} + 2^{13} = -2^{13} - 1^{13} + 0 + 1^{13} + 2^{13} = 0$$

Suite géométrique

Définition 4.7

Pour $a \in \mathbb{R}_0$ et $r \in \mathbb{R}_0$, la suite

$$\left(ar^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(a, ar, ar^2, ar^3, \dots\right)$$

est dite géométrique (de raison r).

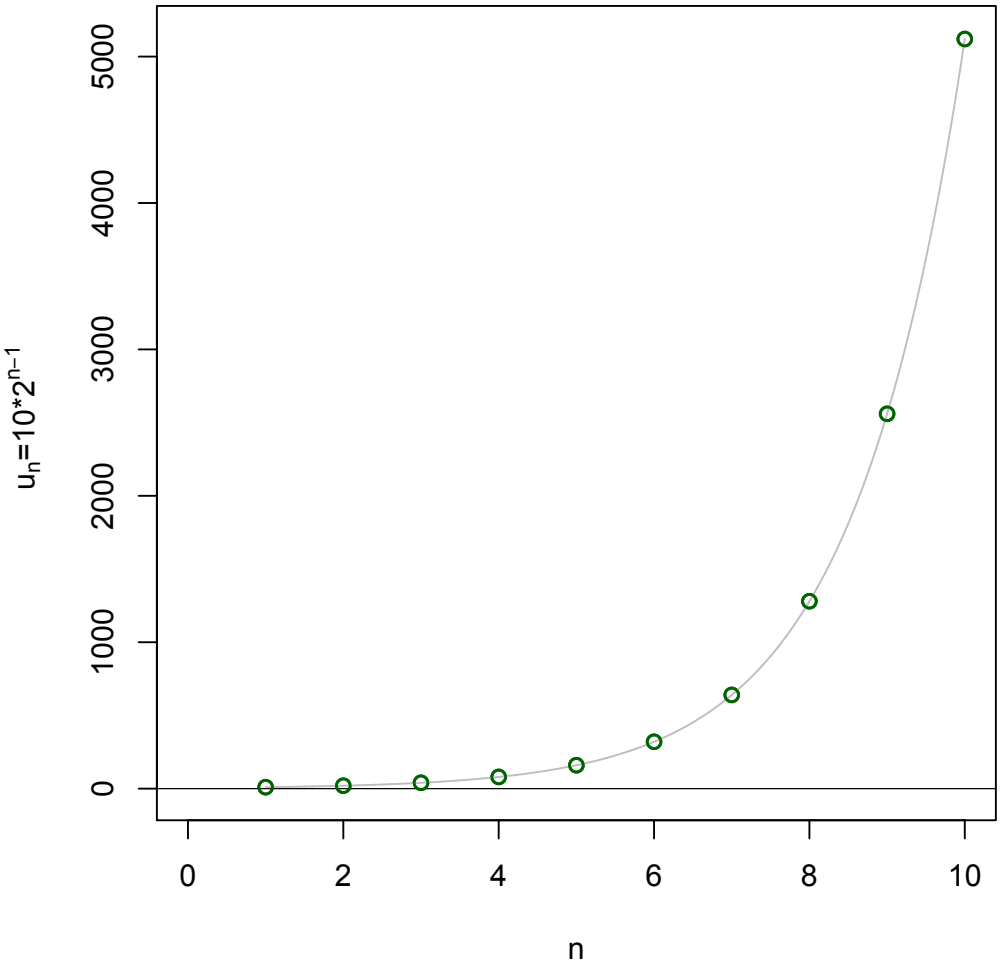
Remarque : (u_n) est géométrique de raison $r \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$, pour tout n.

Exemples :

- $(1, 2, 4, 8, \dots)$ est géométrique. $a=1,\ r=2.$
- $(10, 20, 40, 80, \dots)$ est géométrique. $a=10,\ r=2.$
- $(2, 4, 6, \dots)$ n'est pas géométrique.

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2. \qquad \frac{u_3}{u_2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Suite géométrique : graphe

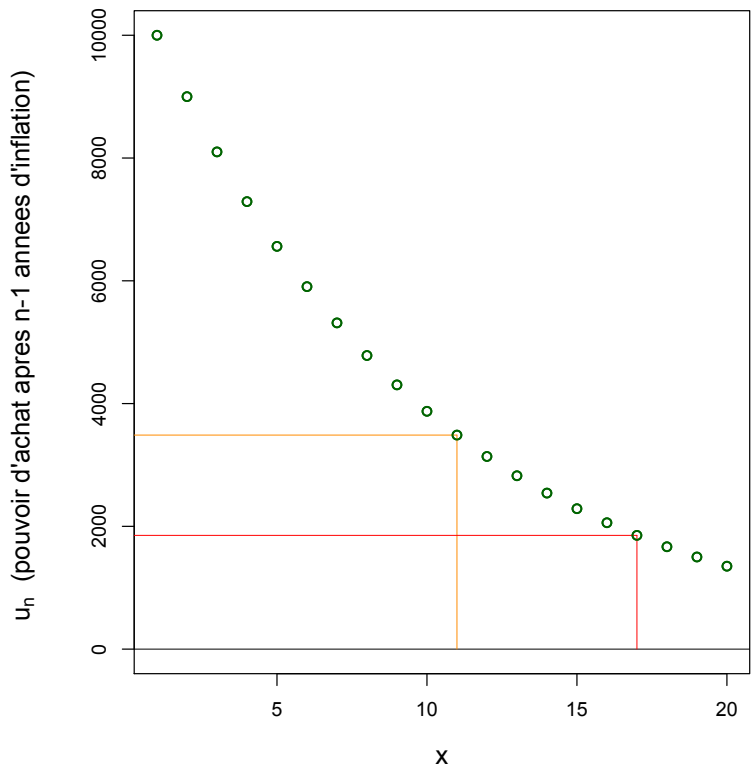


Graphe d'une suite géométrique.

Suite géométrique : exemple

Considérons

- un pays dont l'inflation est de 10% par an[1], et
- un individu qui a aujourd'hui $u_1 = a = 10\,000$€.



S'il ne place pas son argent, ce que cet individu pourra acheter après 10 ans d'inflation vaudra

$$\begin{aligned} u_{11} &= a\,r^{11-1} \\ &= 10\,000 \times 0.9^{11-1} \approx 3487(€). \end{aligned}$$

(u_n) est géométrique de raison 0.9.

[1] Chaque année, on peut acheter 90% seulement de ce qu'on pouvait acheter l'année précédente.

Contenu de la séance

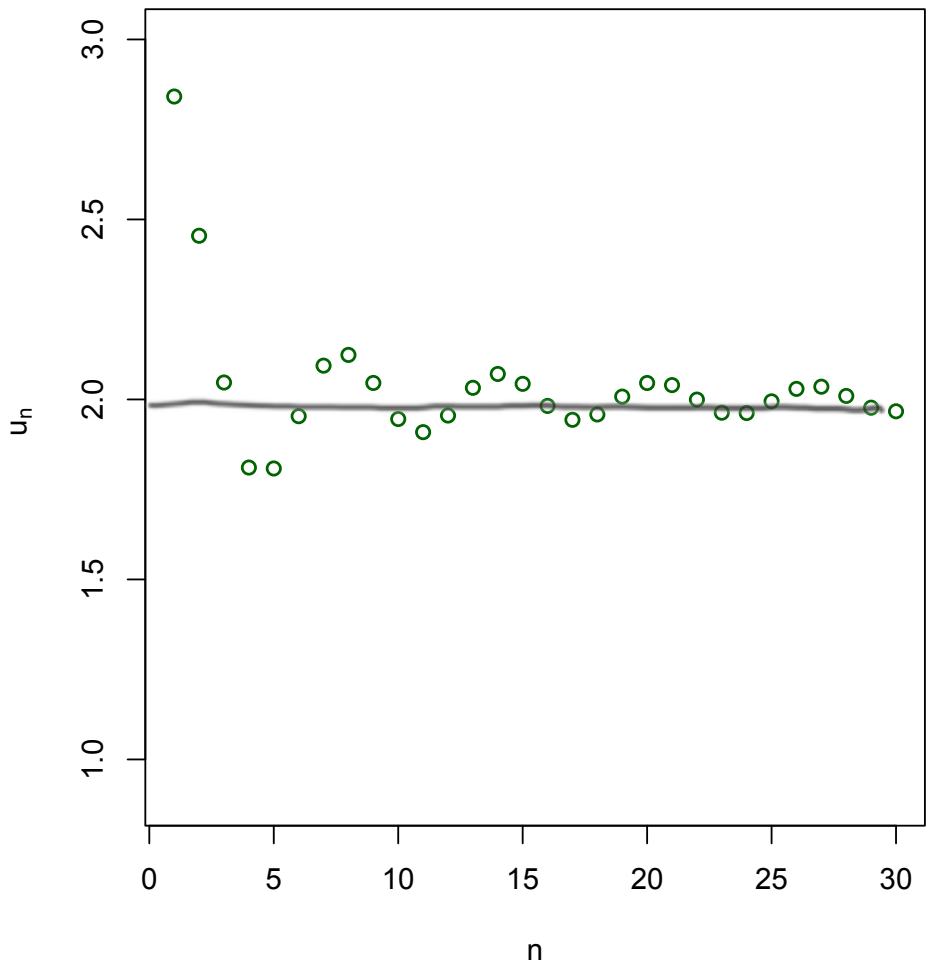
Suite : définition et graphe

Suites arithmétiques et géométriques

Convergence de suites

Convergence : intuition

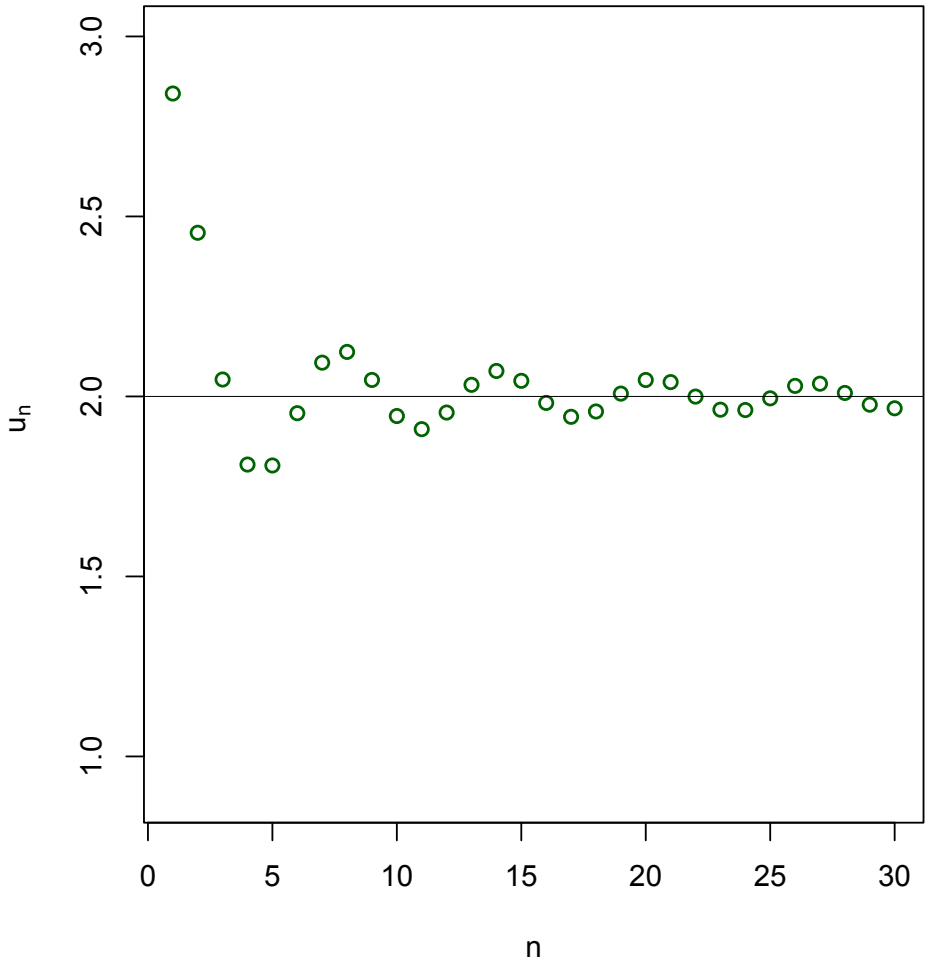
La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence : intuition

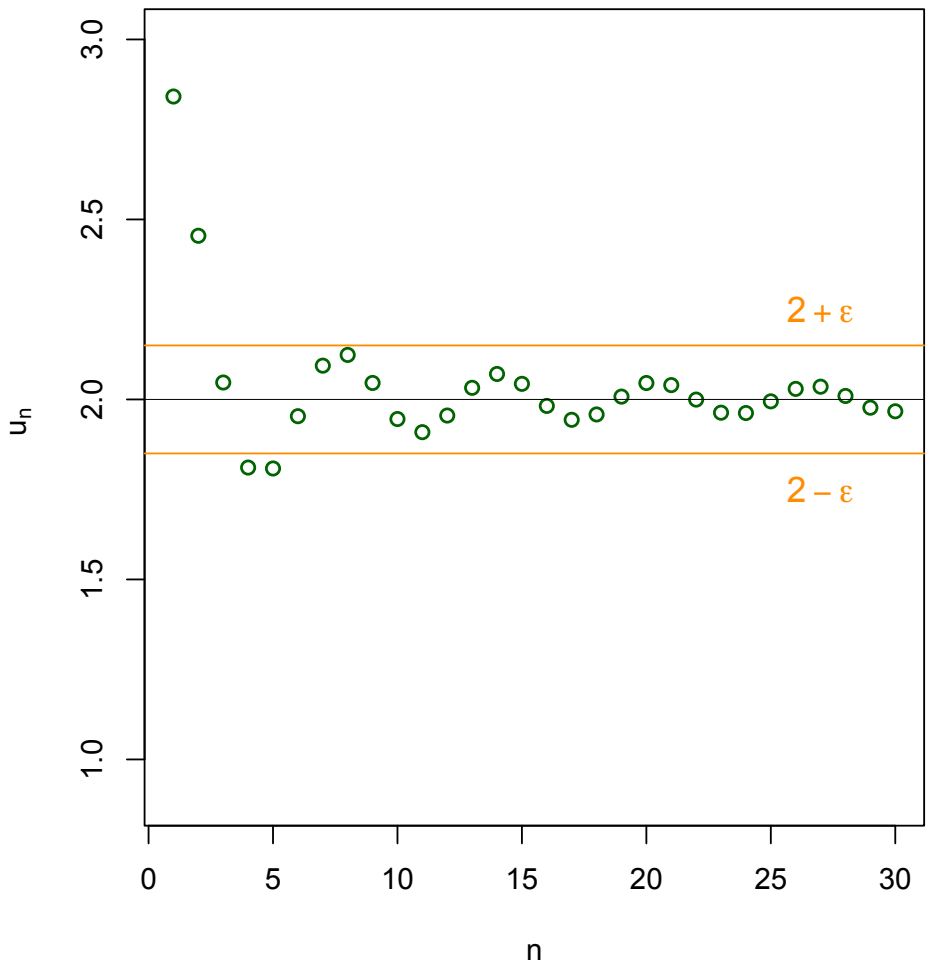
La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence : intuition

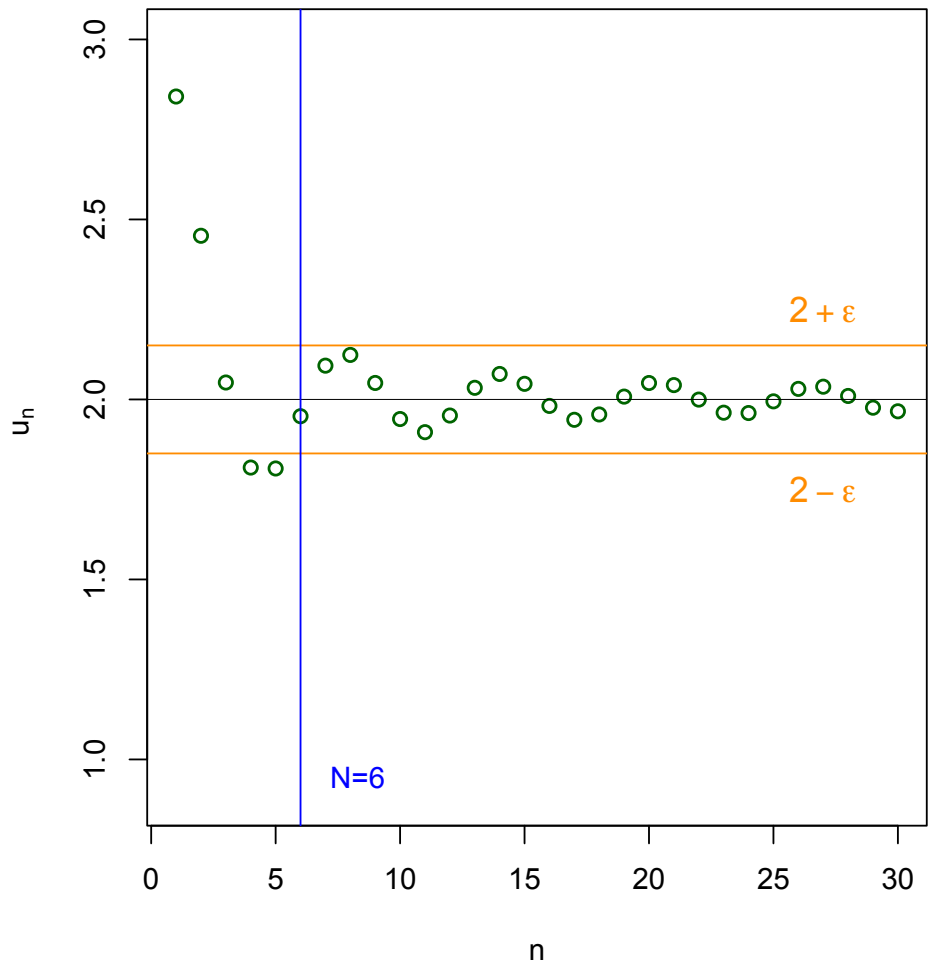
La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence : intuition

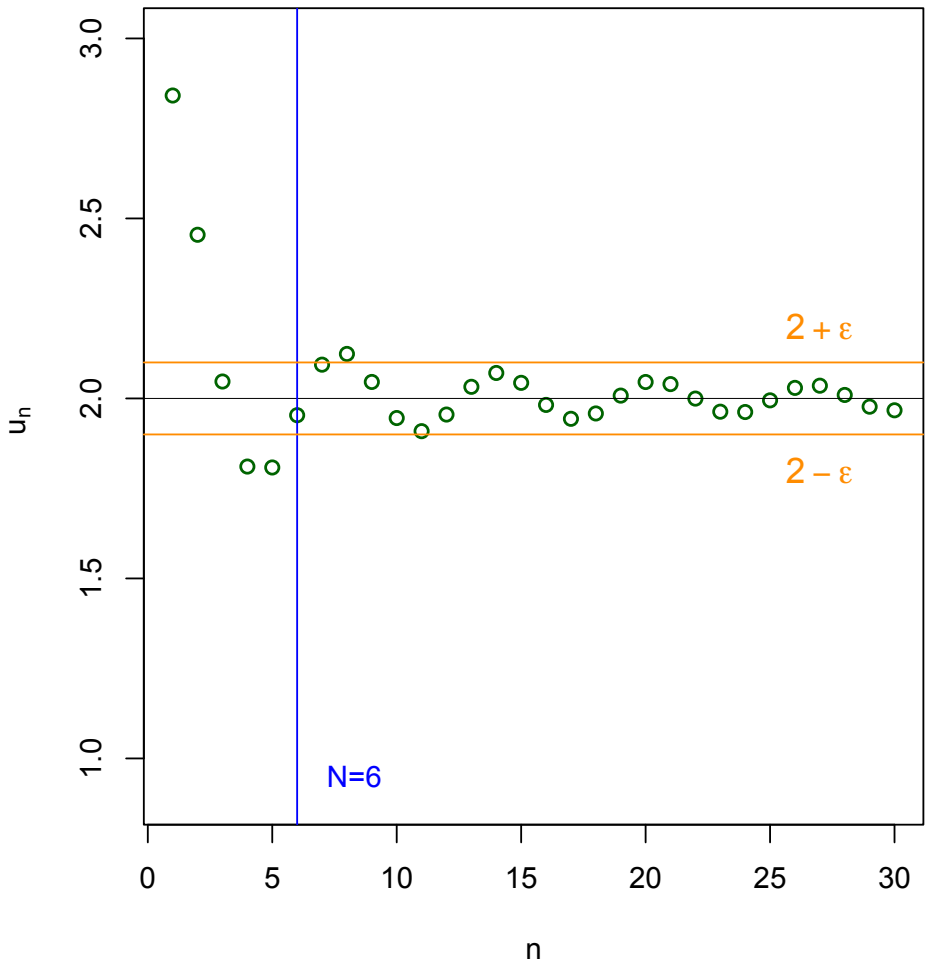
La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence : intuition

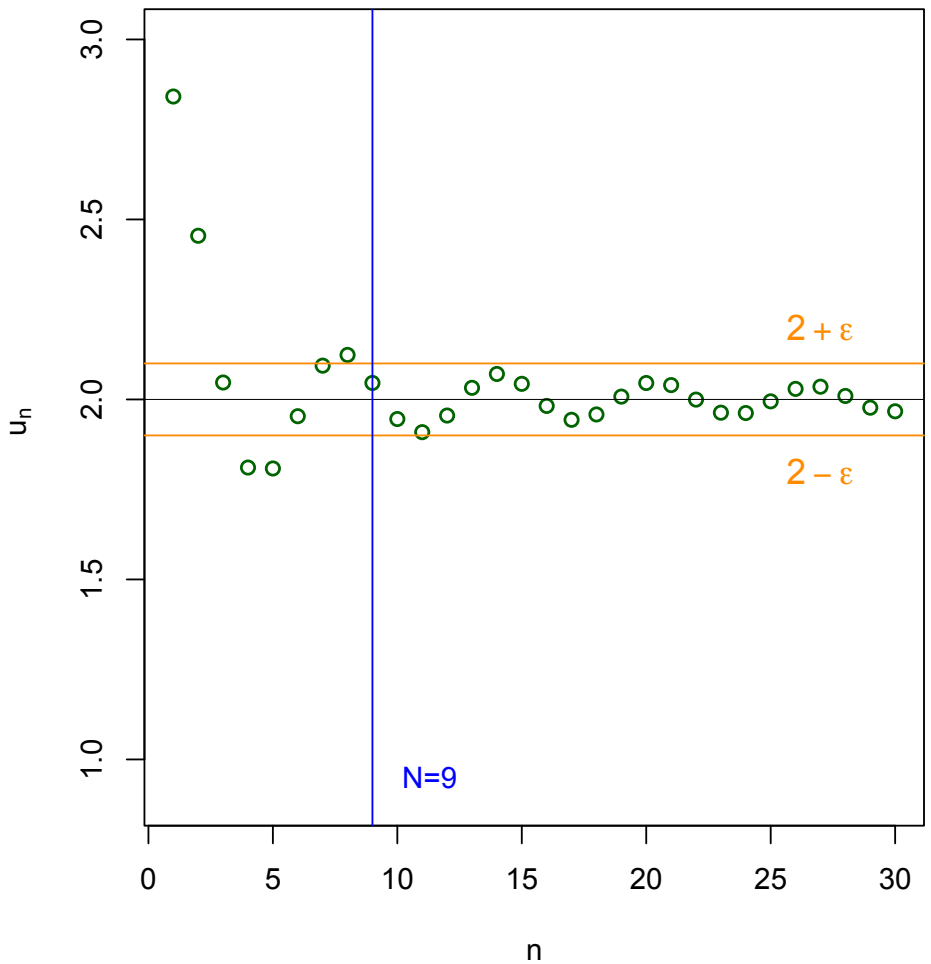
La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence : intuition

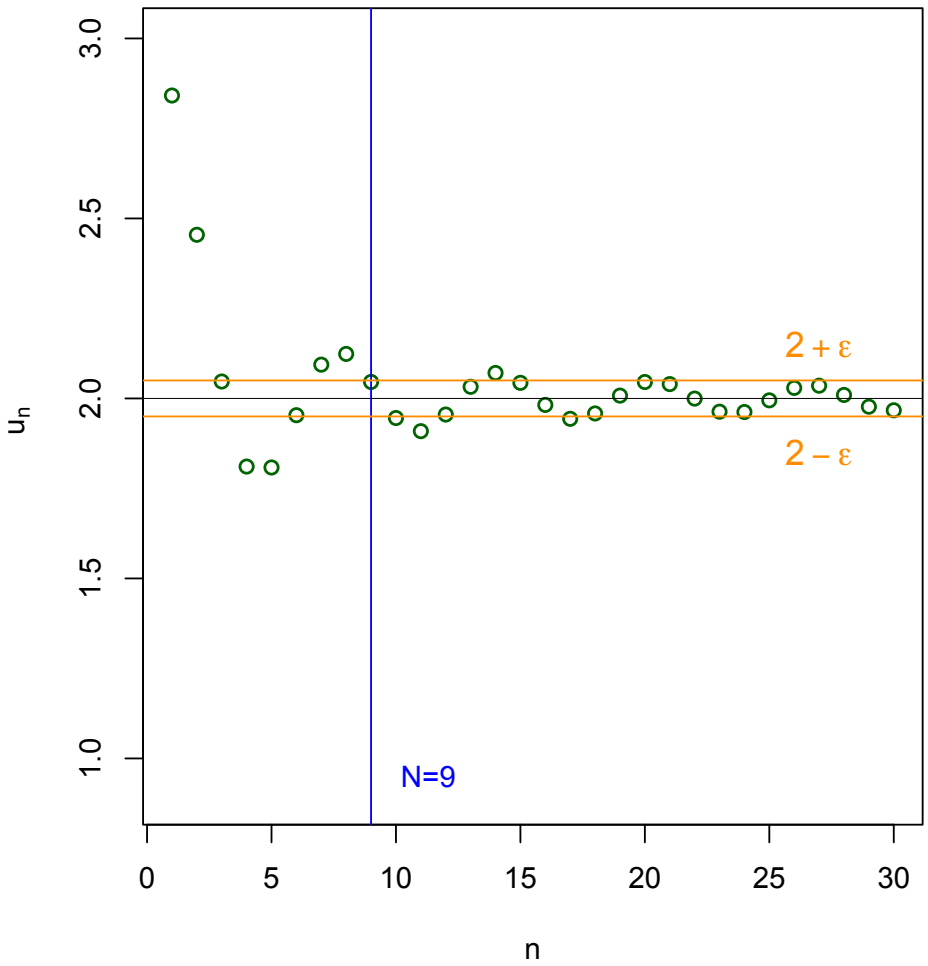
La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence : intuition

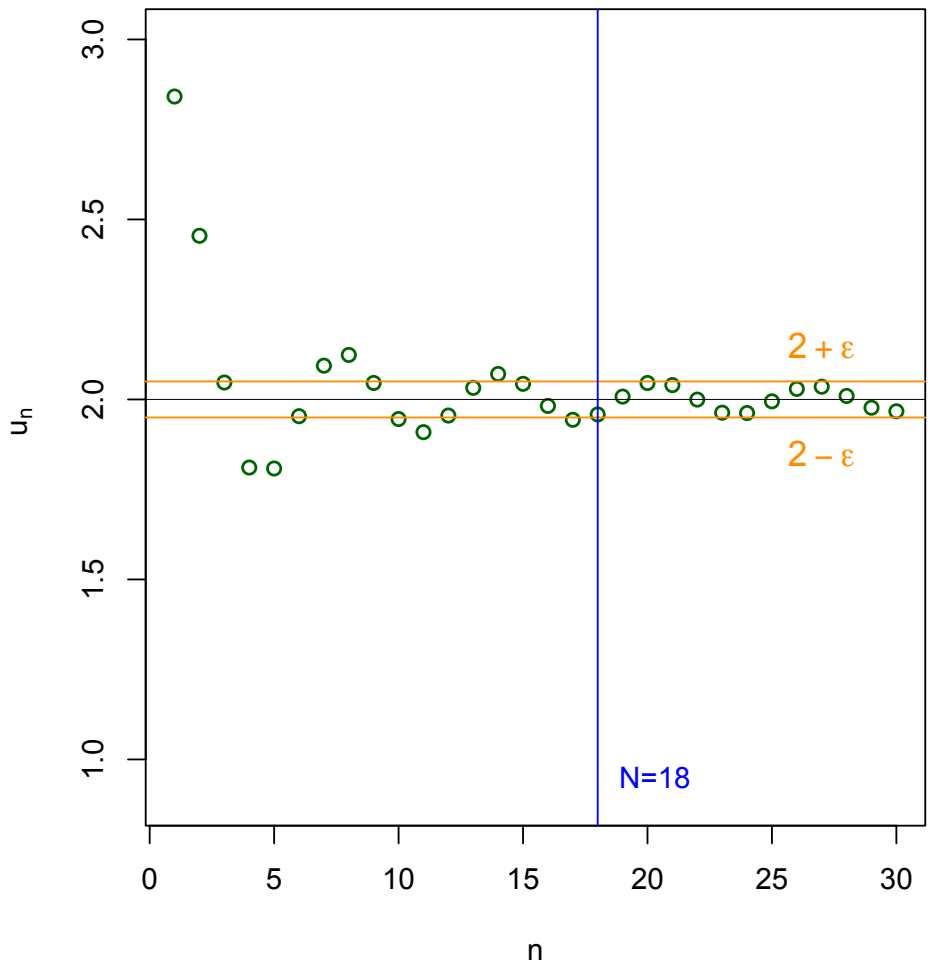
La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence : intuition

La notion de convergence d'une suite réelle exprime que ses termes deviennent "arbitrairement proches" d'un réel donné.



$$(u_n) = \left(\frac{2n + \sin n}{n}\right)$$

Convergence d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle. Soit $u \in \mathbb{R}$.

Définition 4.8

La suite (u_n) converge vers u

$\Longleftrightarrow$ *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que* $\underbrace{|u_n - u| \leq \varepsilon}_{u_n \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon]}$ *pour tout $n \geq N$.*

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}_0 :\ \forall n \geq N,\ |u_n - u| \leq \varepsilon.$

"Quel que soit $\varepsilon (> 0)$, le terme u_n sera, à partir d'un certain indice N, à distance inférieure à ε de la limite u".

On écrira $(u_n) \to u$ ou $\lim_{n \to +\infty} u_n = u$.

Convergence : exemple

Est-ce que $(u_n) = \left(\frac{2n+\sin n}{n}\right)$ converge vers $u = 2$?

Fixons $\varepsilon > 0$ (quelconque !)

On a

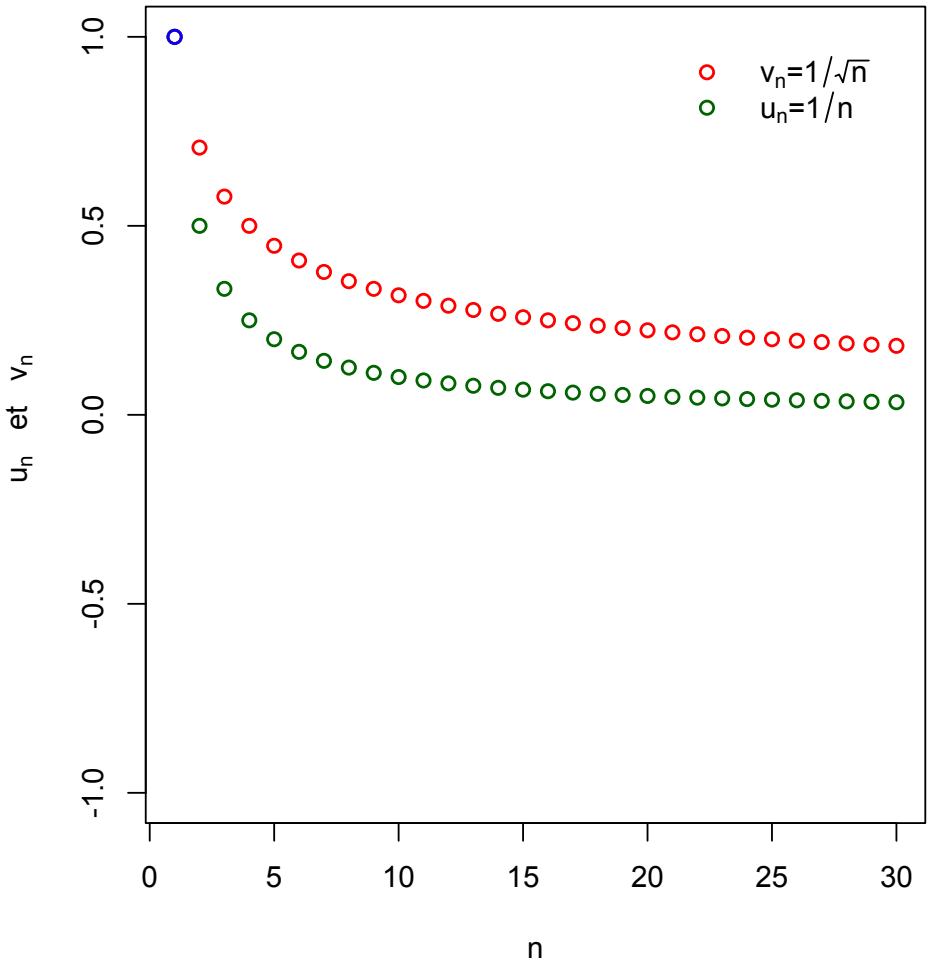
$$|u_n - u| = \left|\frac{2n + \sin n}{n} - 2\right| = \left|2 + \frac{\sin n}{n} - 2\right| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Donc, pour tout entier $n \geq 1/\varepsilon$, on a

$$|u_n - u| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon,$$

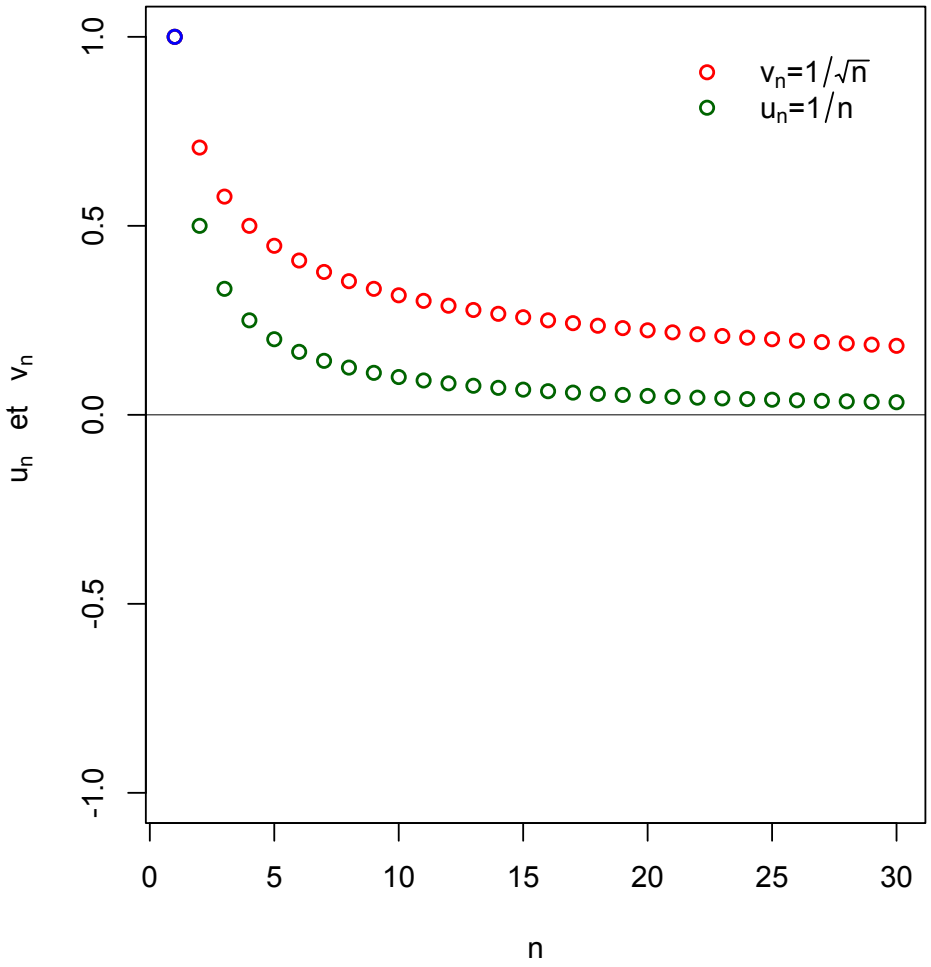
ce qui confirme la convergence.

Convergence : illustration



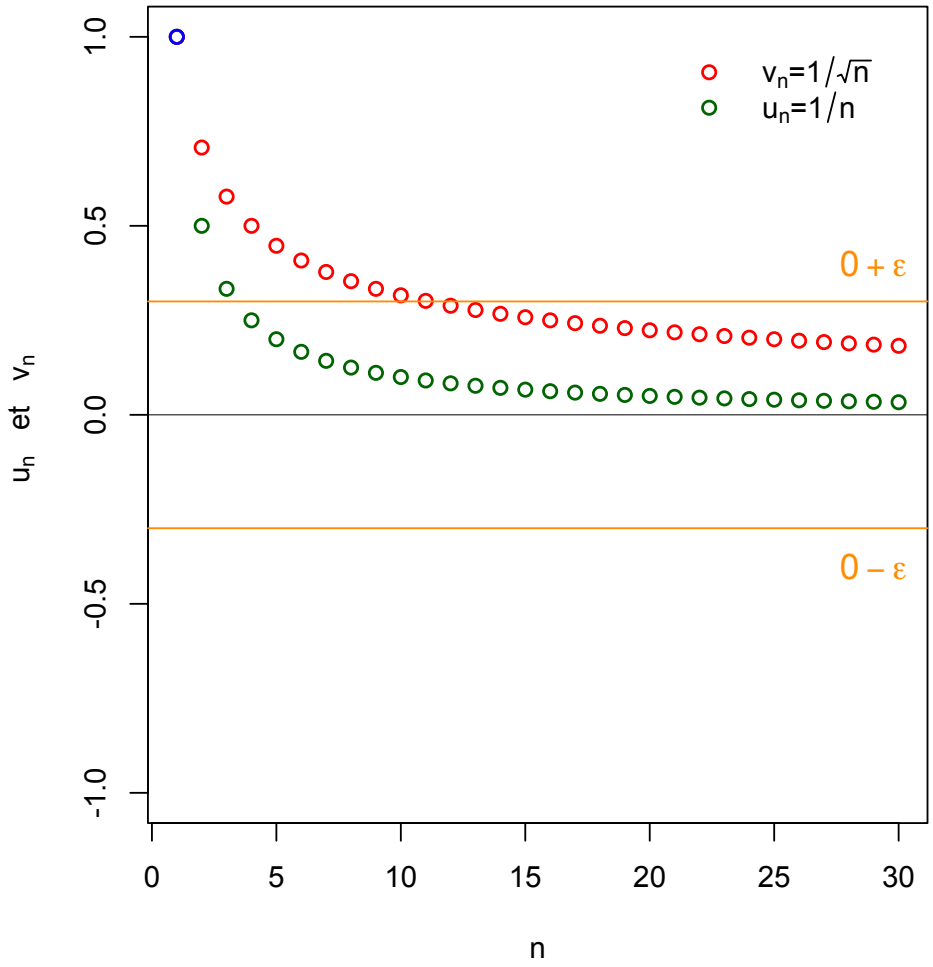
Le N qui convient (à ε fixé) dépend de la suite considérée.

Convergence : illustration



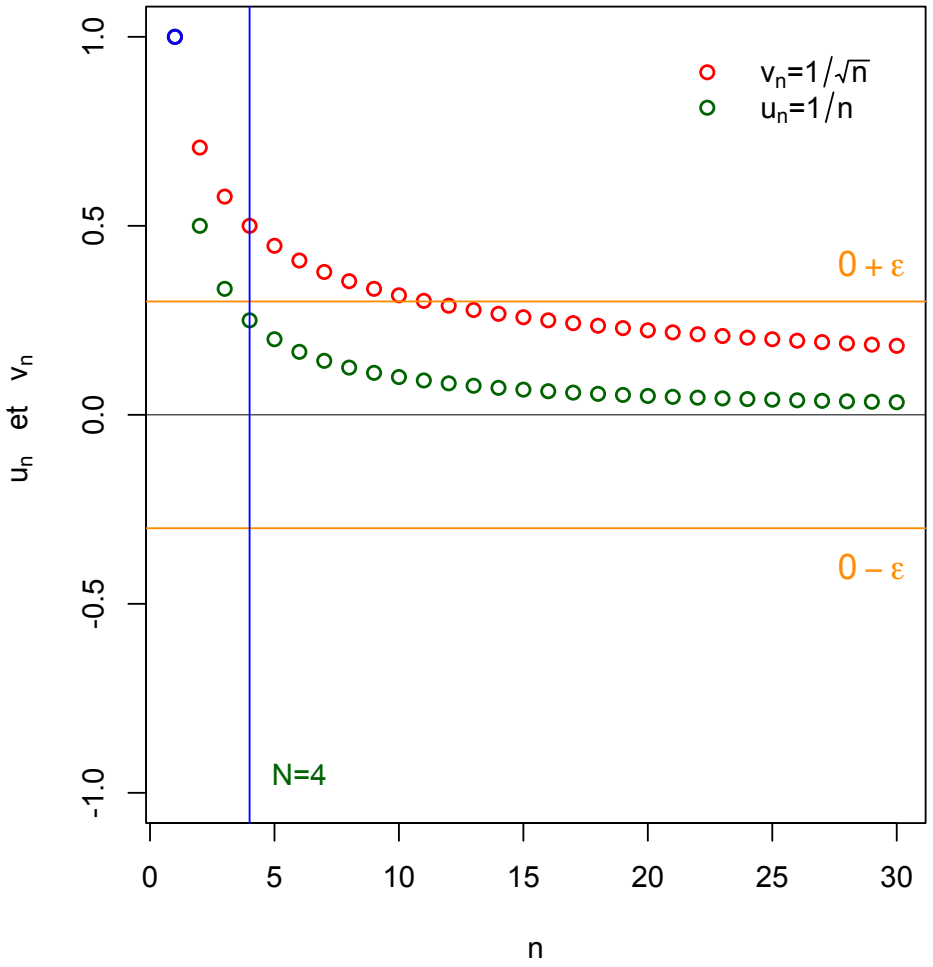
Le N qui convient (à ε fixé) dépend de la suite considérée.

Convergence : illustration



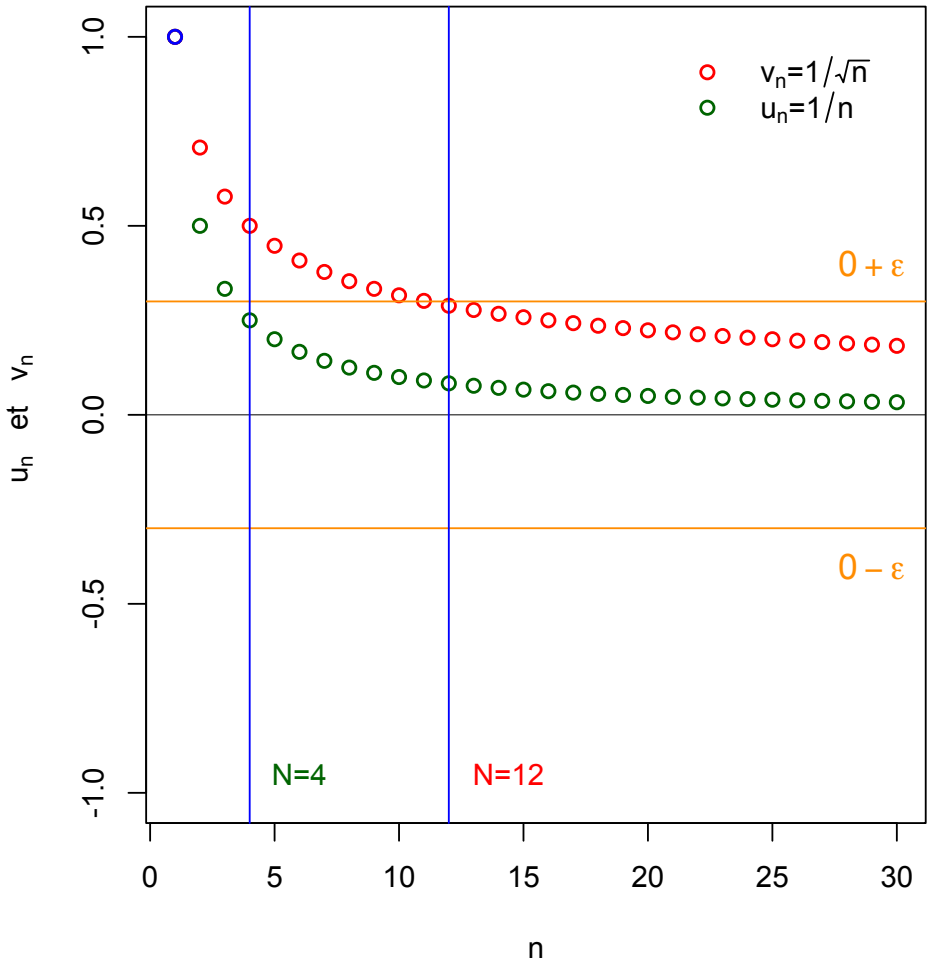
Le N qui convient (à ε fixé) dépend de la suite considérée.

Convergence : illustration



Le N qui convient (à ε fixé) dépend de la suite considérée.

Convergence : illustration



Le N qui convient (à ε fixé) dépend de la suite considérée.

Interlude : à vous de jouer

Prouvez (par groupe) que

- Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $(u, u, \ldots) \to u$,
- $(\frac{1}{n}) \to 0$,
- $(\frac{1}{\sqrt{n}}) \to 0$,
- $(\frac{1}{n^2}) \to 0$.

u_n

$v_n = \frac{1}{n^a}$ avec $a > 0$.

Pour u_n : $u_n \to u$.

$\forall n \in \mathbb{N}_0$, $u_n = u$.

Soit $\varepsilon > 0$,

$|u_n - u| = |u - u| = |0| = 0 \leq \varepsilon$

Pour v_n : $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $v_n = \frac{1}{n^a}$?

Mq : $v_n \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

$|v_n - 0| = \left|\frac{1}{n^a}\right| = \frac{1}{n^a}$. On a :

$\frac{1}{n^a} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n^a \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow (n^a)^{\frac{1}{a}} \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}$

$\Leftrightarrow n \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/a}$.

On dira que ces suites convergent dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.9

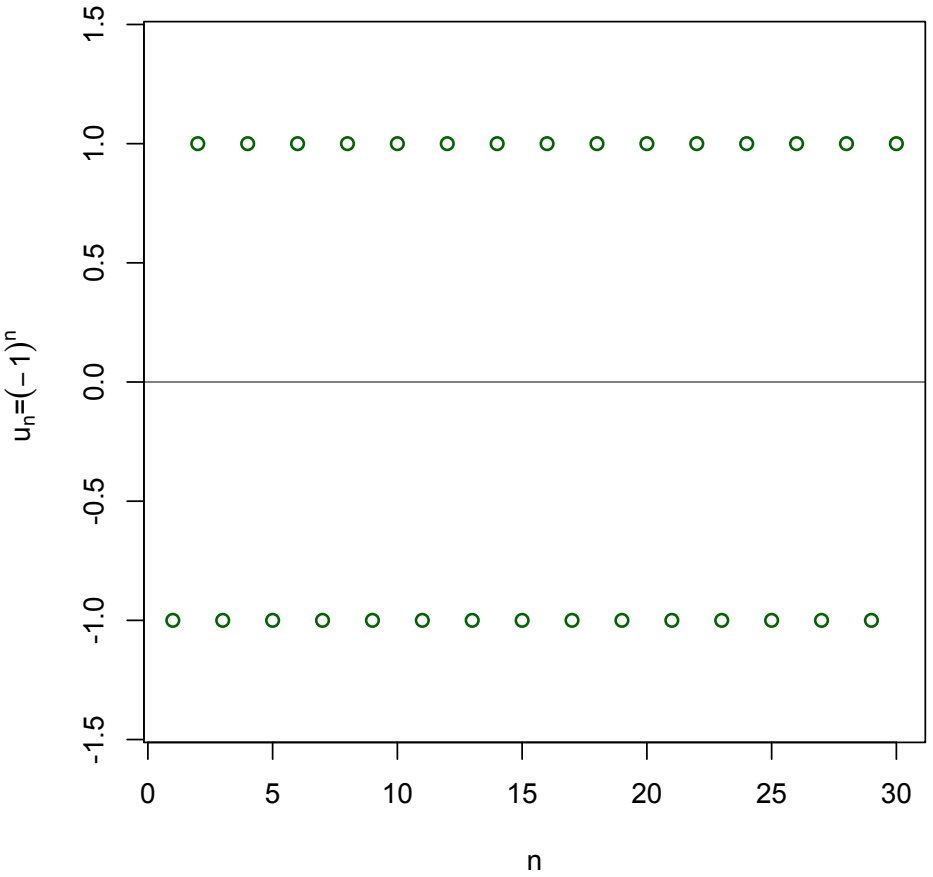
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_0, \forall n \geq N, |v_n - 0| \leq \varepsilon$.

$(N \geq (1/\varepsilon)^{1/a})$

(u_n) converge dans $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ *Il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n) \to u$.*

Suite non convergente : exemple

Est-ce que $((-1)^n)$ converge vers 1 ?



Suite alternée : négation

Si l'intuition est que $((-1)^n)$ ne converge pas vers 1, on fera attention, pour le montrer, à bien nier la définition de convergence !

La négation correcte de

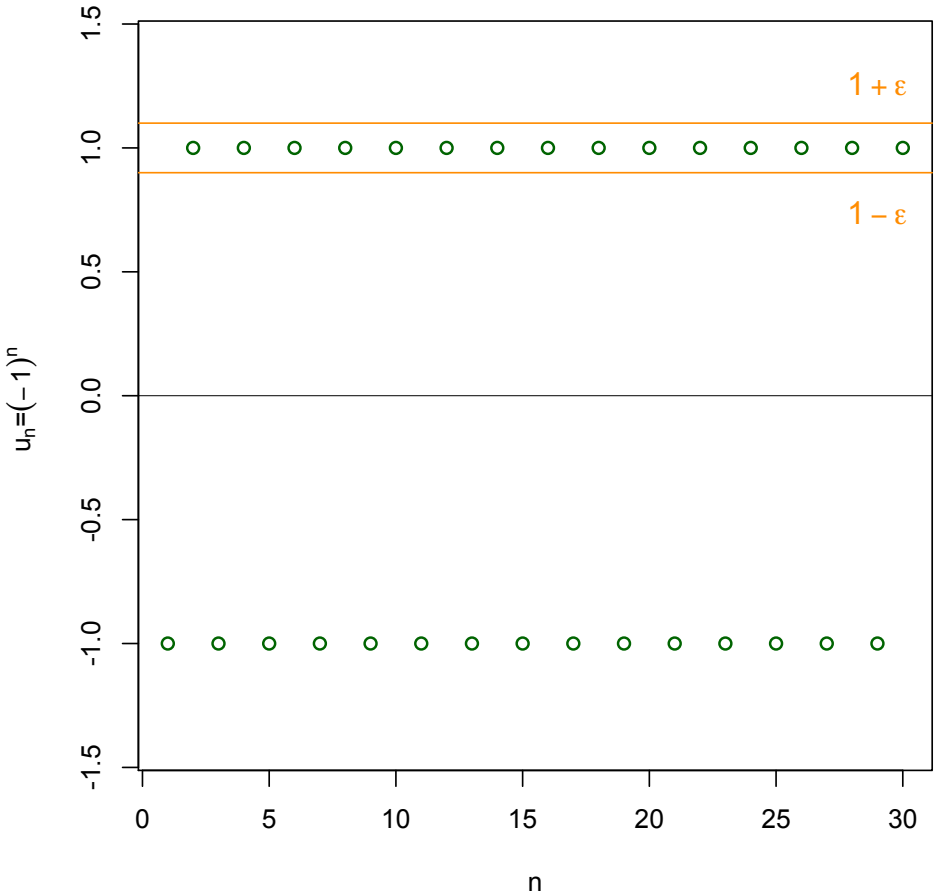
(u_n) converge vers u
$\iff$ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}_0$ tel que $|u_n - u| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$

est

(u_n) ne converge pas vers u
$\iff$ Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}_0$, $|u_n - u| > \varepsilon$ pour au moins un $n \geq N$.

Suite alternée : preuve

$((-1)^n)$ ne converge pas vers 1...

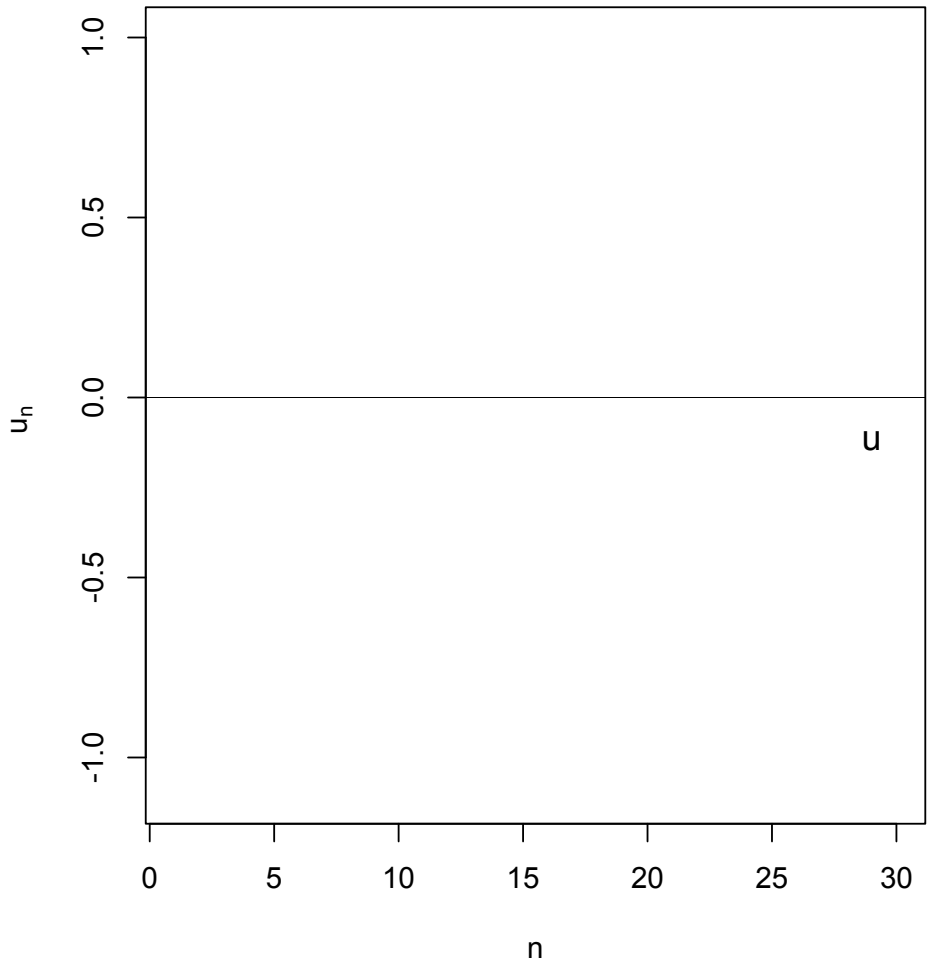


...car si on prend $\varepsilon = 0.1$, on pourra, pour tout N, trouver $n \geq N$ tel que $\underbrace{|u_n - 1| > 0.1}_{u_n \notin [1-0.1, 1+0.1]}$.

Unicité de la limite

Théorème 4.10

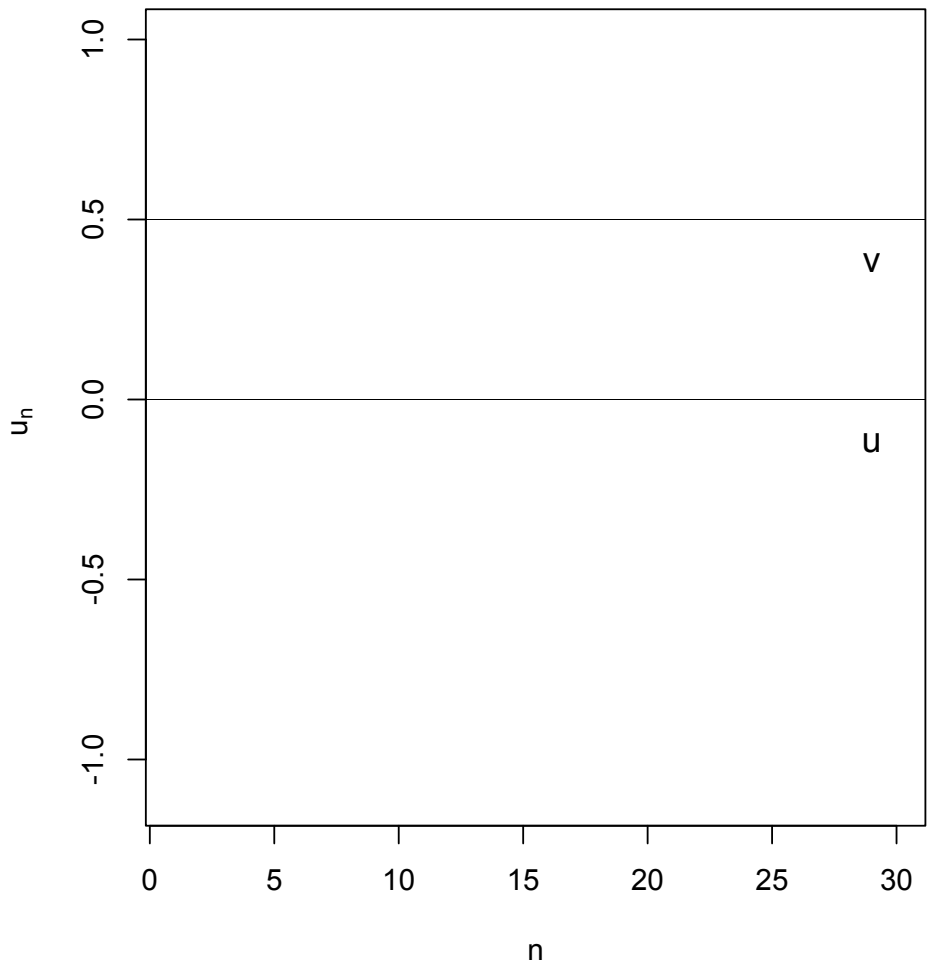
Soit (u_n) une suite qui converge dans $\mathbb{R}$. Alors sa limite est unique.



Unicité de la limite

Théorème 4.10

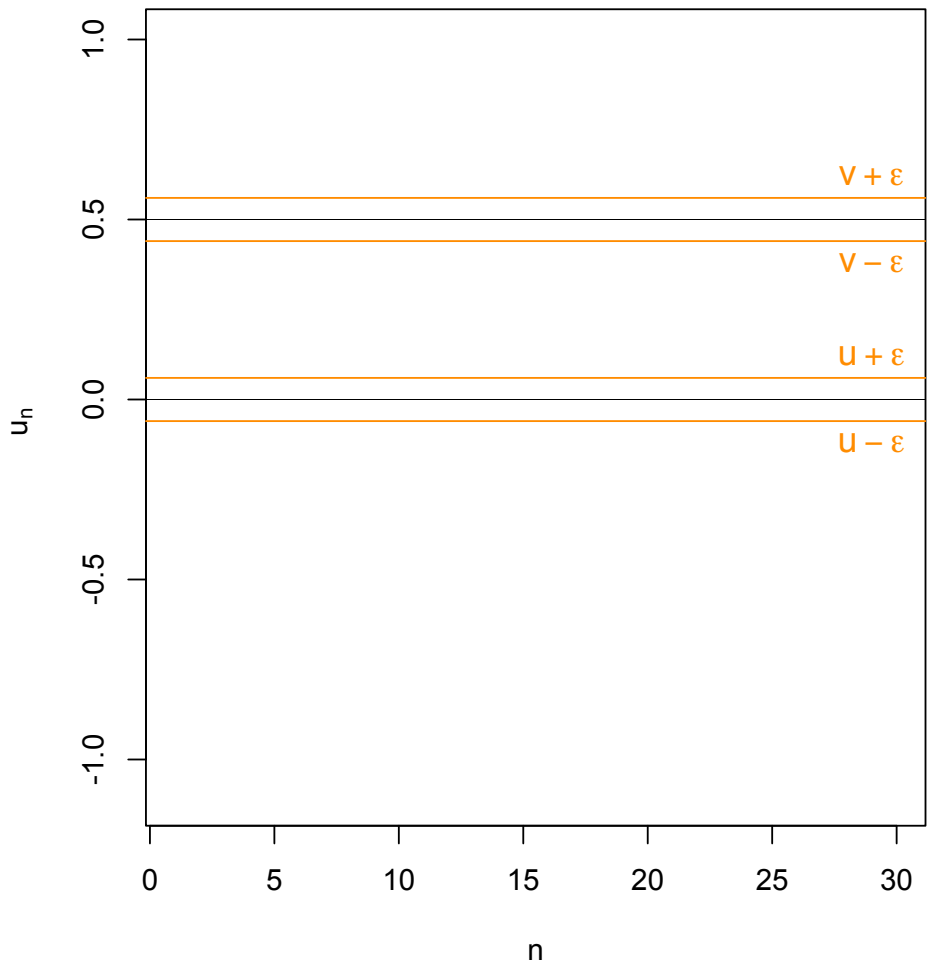
Soit (u_n) une suite qui converge dans $\mathbb{R}$. Alors sa limite est unique.



Unicité de la limite

Théorème 4.10

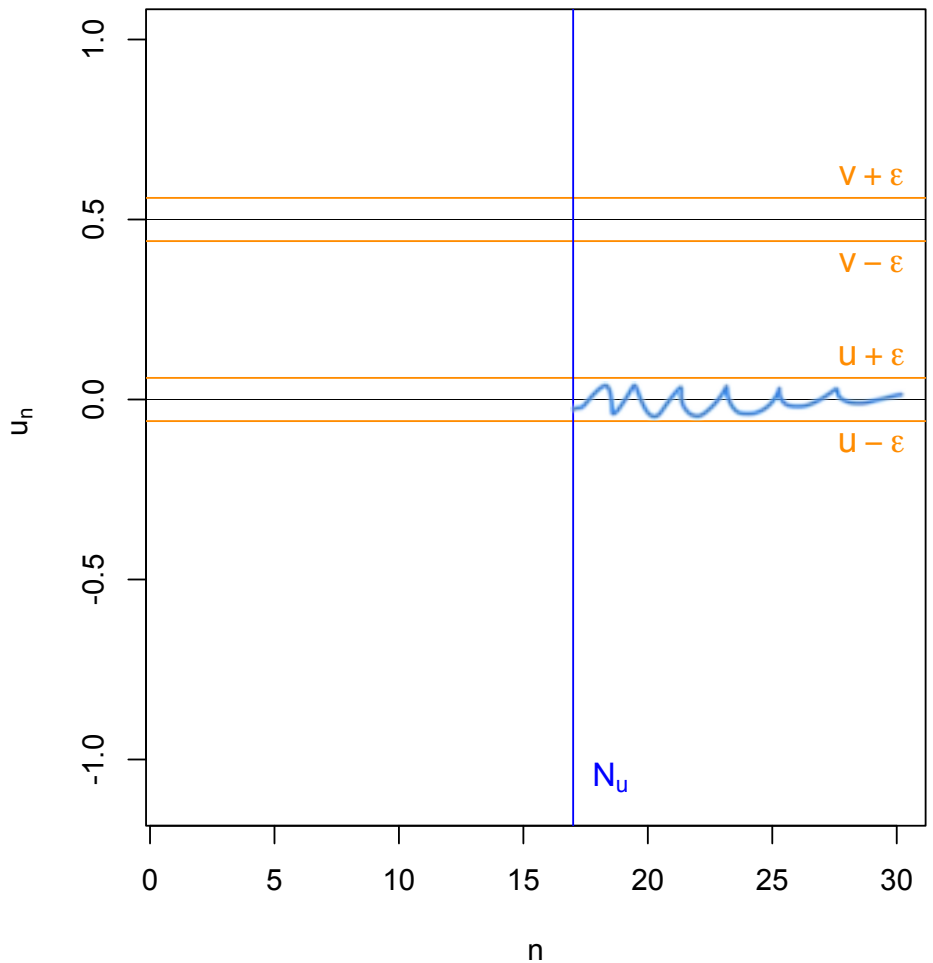
Soit (u_n) une suite qui converge dans $\mathbb{R}$. Alors sa limite est unique.



Unicité de la limite

Théorème 4.10

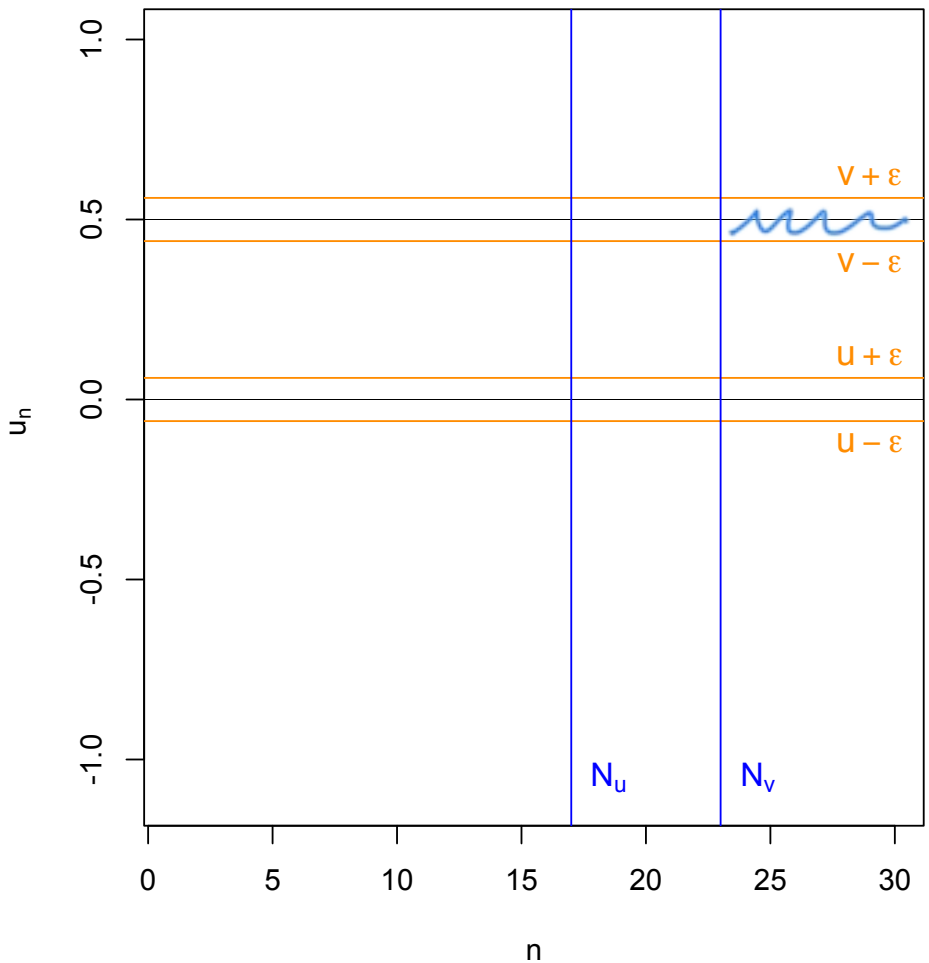
Soit (u_n) une suite qui converge dans $\mathbb{R}$. Alors sa limite est unique.



Unicité de la limite

Théorème 4.10

Soit (u_n) une suite qui converge dans $\mathbb{R}$. Alors sa limite est unique.



Unicité de la limite : démonstration

Théorème 4.11

Soit (u_n) une suite qui converge dans $\mathbb{R}$. Alors sa limite est unique.

Démonstration :

Supposons par l'absurde que $u_n \to u$ et $u_n \to v$ et $u < v$.

- $u_n \to u$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_u \in \mathbb{N}_0 :\ \forall n \geq N_u :\ |u_n - u| \leq \varepsilon$. (*)
- $u_n \to v$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_v \in \mathbb{N}_0 :\ \forall n \geq N_v :\ |u_n - v| \leq \varepsilon$. (**)

or, pour ε suffisamment petit, les deux voisinages $]u-\varepsilon, u+\varepsilon[\cap]v-\varepsilon, v+\varepsilon[\cap \emptyset$.

(*) $\Rightarrow \forall n \geq N_u,\ u_n \in]u-\varepsilon, u+\varepsilon[$.

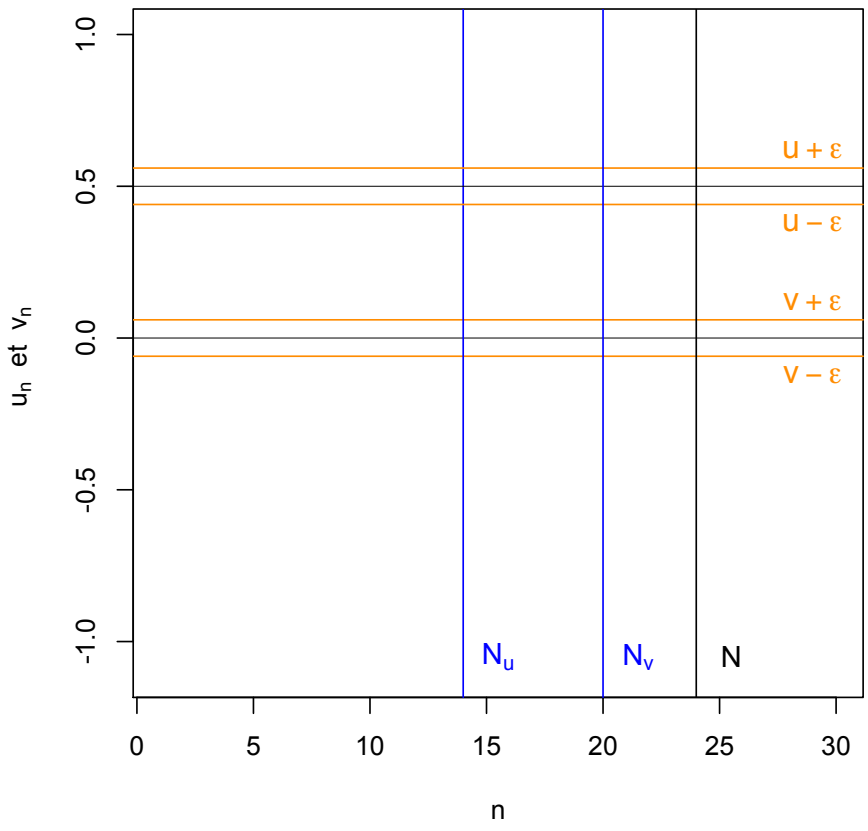
(**) $\Rightarrow \forall n \geq N_v,\ u_n \in]v-\varepsilon, u+\varepsilon[$.

$\forall n \geq \max(N_u, N_v),\ u_n \in]u-\varepsilon, u+\varepsilon[\cap]v-\varepsilon, v+\varepsilon[= \emptyset$ CONTRAD.

Conservation des inégalités

Théorème 4.12

Soient $(u_n) \to u \ (\in \mathbb{R})$ *et* $(v_n) \to v \ (\in \mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe* $N \in \mathbb{N}_0$ *tel que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq N$. *Alors* $u \leq v$.



Conservation des inégalités : preuve

Théorème 4.13

Soient $(u_n) \to u\ (\in \mathbb{R})$ *et* $(v_n) \to v\ (\in \mathbb{R})$. *Supposons qu'il existe* $N \in \mathbb{N}_0$ *tel que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq N$. *Alors* $u \leq v$.

Démonstration : Supposons par l'absurde que $u > v$

Soit $\varepsilon > 0$, $[u-\varepsilon, u+\varepsilon]$ voisinage autour de u.

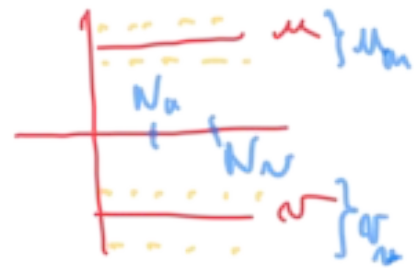
$[v-\varepsilon ; v+\varepsilon]$ voisinage autour de v.

On peut prendre un $\varepsilon > 0$ suff. petit pour avoir

$$[u-\varepsilon ; u+\varepsilon] \cap [v-\varepsilon ; v+\varepsilon] = \emptyset$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_u$, $u_n \in [u-\varepsilon ; u+\varepsilon]$

$n \geq N_v$, $v_n \in [v-\varepsilon ; v+\varepsilon]$.



Puisque $\forall n$, $u_n \leq v_n$. et que $u > v$, alors CONTRADICTION avec $u > v$.

Remarque : les inégalités strictes ne sont pas conservées !

Exemple : on a $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$, mais pas $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}_{=0} < \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}}_{=0}$.